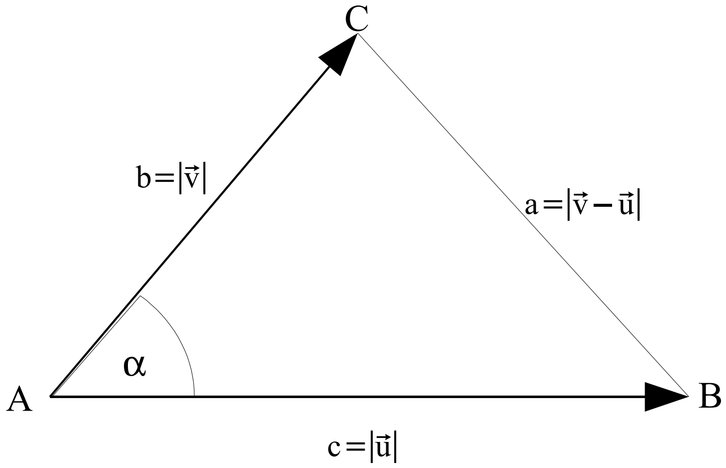
Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren

Wir wollen die Größe des Winkels α zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ berechnen. Die beiden Vektoren spannen das Dreieck ABC auf:



Nach dem Cosinussatz gilt für jedes beliebige Dreieck ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$a^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_2 - u_2)^2 = (v_1^2 - 2u_1 v_1 + u_1^2) + (v_2^2 - 2u_2 v_2 + u_2^2) + (v_3^2 - 2u_3 v_3 + u_3^2)$$

$$b^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

$$c^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Setzt man diese drei Terme in die Formel des Cosinussatzes ein, dann fallen alle Quadrate weg:

$$-2u_1 v_1 - 2u_2 v_2 - 2u_3 v_3 = -2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Kürzen mit -2 ergibt:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist also eine Zahl (ein *Skalar*), die man erhält, indem man die entsprechenden Komponenten beider Vektoren multipliziert und die Ergebnisse addiert. Man nennt diese Operation das sogenannte *Skalarprodukt* von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ und schreibt kurz:

$$\boxed{\vec{u} \circ \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$$

Skalarprodukt von $\vec{u}$ und $\vec{v}$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist also stets eine Zahl aus IR.

Damit lässt sich α nun berechnen:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}} \text{ bzw } \boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \circ \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{u}^0 \circ \vec{v}^0}$$

Der Cosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren ist also gleich dem Skalarprodukt der zugehörigen Einheitsvektoren.