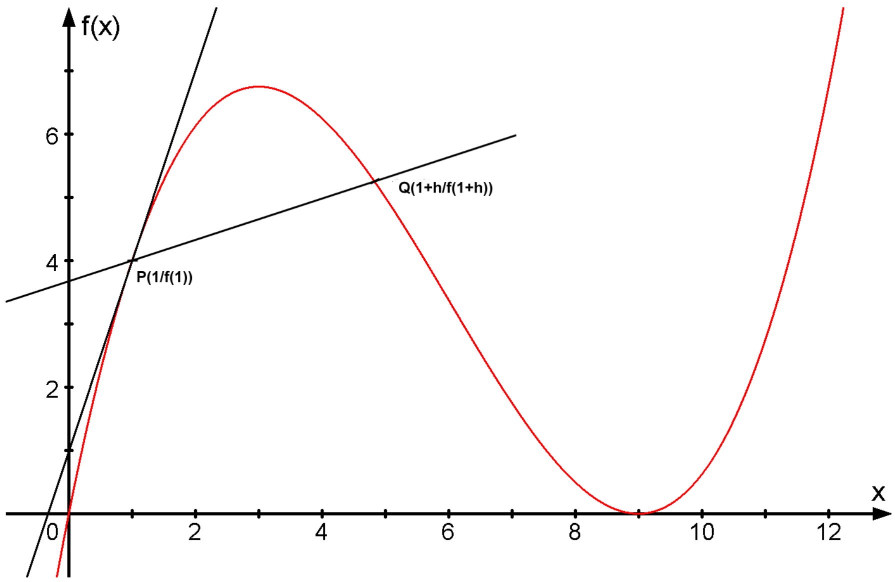
Bestimmung der Steigung eines Funktionsgraphen

Wir wollen im Folgenden die Steigung des Graphen der Funktion $f \mapsto \frac{1}{16}x(x-9)^2$ an der Stelle $x_0=1$ bestimmen. Der zugehörige Kurvenpunkt P hat die Koordinaten (1/f(1)), weil er auf G_f liegt. Da wir Steigungen von Kurven noch nicht definiert haben, bestimmen wir zunächst die Steigung der Tangente an G_f im Punkt P (wir werden später die Kurvensteigung als die Steigung der zugehörigen Tangente definieren).

Zur Bestimmung der Tangentensteigung müssen wir zu einem Trick greifen: Wir ersetzen die Tangente zunächst durch die Sekante durch P und einen weiteren Kurvenpunkt Q, der h Einheiten weiter rechts liegt (h ist eine -meist kleine- positive Zahl). Q hat also die Koordinaten (1+h / f(1+h)).



Die Steigung einer Geraden durch die Punkte $A(x_1/y_1)$ und $B(x_2/y_2)$ kann man, wie bereits besprochen, mit folgender Formel bestimmen:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Setzen wir unsere beiden Punkte P und Q ein, so erhalten wir für die Sekantensteigung:

$$m_S = \frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h}.$$

Also gilt:

$$m_S = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{16}(1+h)(1+h-9)^2 - \frac{1}{16}\cdot 1\cdot 64}{h} = \frac{\frac{1}{16}\left(h^3 - 15h^2 + 48h + 64\right) - 4}{h}$$

$$= \frac{\frac{1}{16}\left(h^3 - 15h^2 + 48h\right)}{h} = \underline{\frac{1}{16}(h^2 - 15h + 48)}$$