

Satz: Jede Polynomkurve vom Grad 3 hat genau einen Wendepunkt und ist zu diesem symmetrisch.

Beweis: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
 $f''(x) = 6ax + 2b = 0$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

Der Graph von f ist symmetrisch zum Punkt (x_0 / y_0) , wenn gilt:

$$2y_0 = f(x_0 + h) + f(x_0 - h) \quad (\text{für jeden beliebigen positiven Wert von } h)$$

$$x_0 = -\frac{b}{3a} \Rightarrow 3ax_0 = -b$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) + f(x_0 - h) &= a(x_0 + h)^3 + b(x_0 + h)^2 + c(x_0 + h) + d + \\ &\quad + a(x_0 - h)^3 + b(x_0 - h)^2 + c(x_0 - h) + d \\ &= a(x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3) + b(x_0^2 + 2x_0h + h^2) + cx_0 + ch + d + \\ &\quad + a(x_0^3 - 3x_0^2h + 3x_0h^2 - h^3) + b(x_0^2 - 2x_0h + h^2) + cx_0 - ch + d \\ &= a(2x_0^3 + 6x_0h^2) + b(2x_0^2 + 2h^2) + 2cx_0 + 2d \\ &= 2ax_0^3 + 2bx_0^2 + 2cx_0 + 2d + 6ax_0h^2 + 2bh^2 \\ &= 2 \cdot (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d) + 2h^2 \cdot \underbrace{(3ax_0 + b)}_{= 0 \text{ (da } 3ax_0 = -b)} \\ &= 2 \cdot (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d) \\ &= 2 \cdot f(x_0) = \underline{2y_0} \\ &\Rightarrow f \text{ ist symmetrisch zu } (x_0 / y_0) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$